Vecteurs et géométrie repérée

Varoqui Hervé

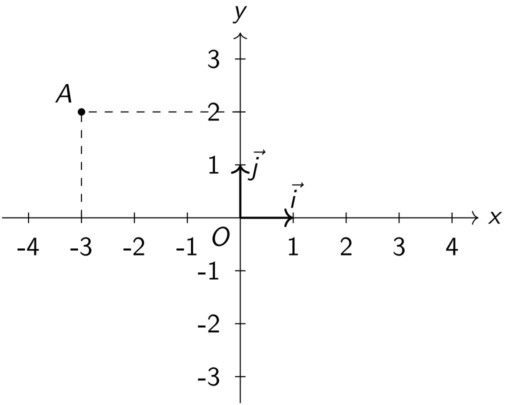
Lycée Saint-Exupéry

March 16, 2026

Repère orthonormé

Lecture de coordonnées

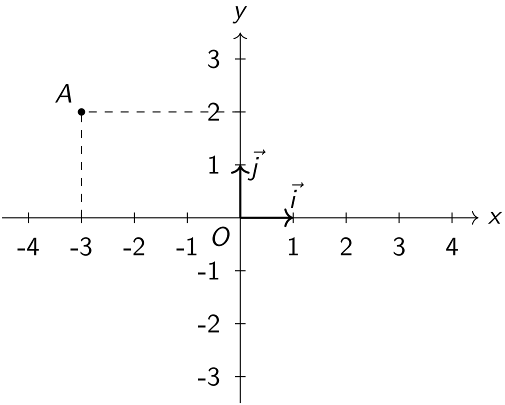
Dans le repère orthonormé $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$, lire les coordonnées du point A.



Repère orthonormé

Lecture de coordonnées

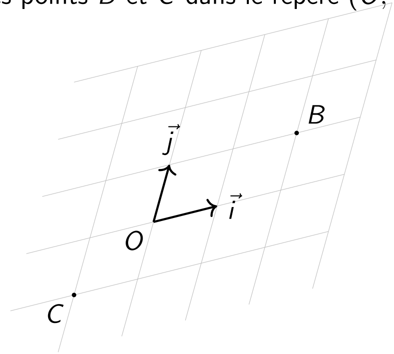
Dans le repère orthonormé $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$, lire les coordonnées du point A.



$$A(-3\,;\;2)$$

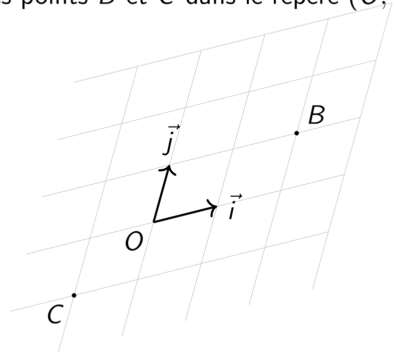
Repère non orthonormée

Lire les coordonnées des points B et C dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$.



Repère non orthonormée

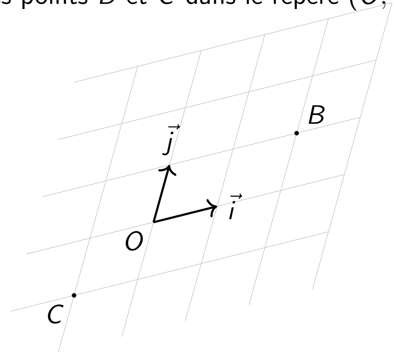
Lire les coordonnées des points B et C dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$.



$B(2\,;\,1)$

Repère non orthonormée

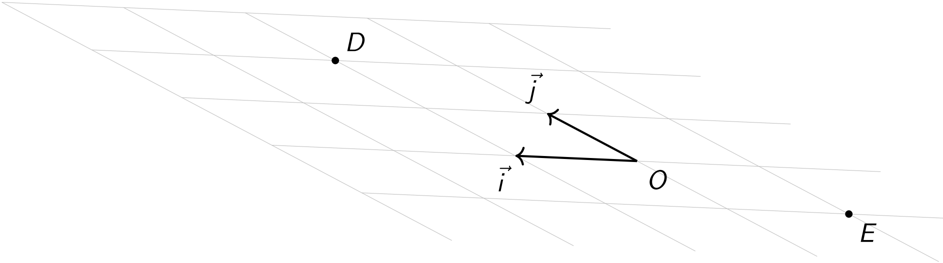
Lire les coordonnées des points B et C dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$.



$$B(2\,;\,1) \quad C(-1\,;\,-1)$$

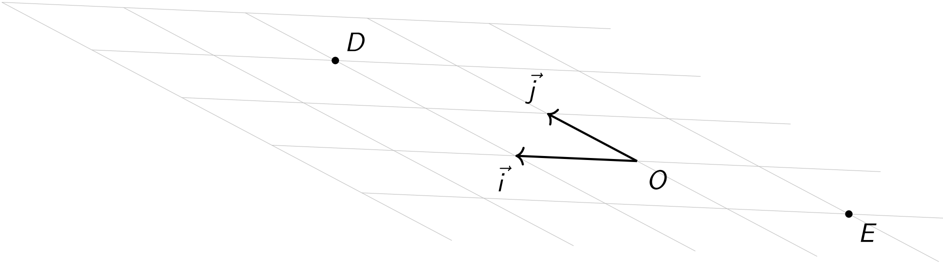
Un peu plus difficile

Lire les coordonnées de D et E dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$.



Un peu plus difficile

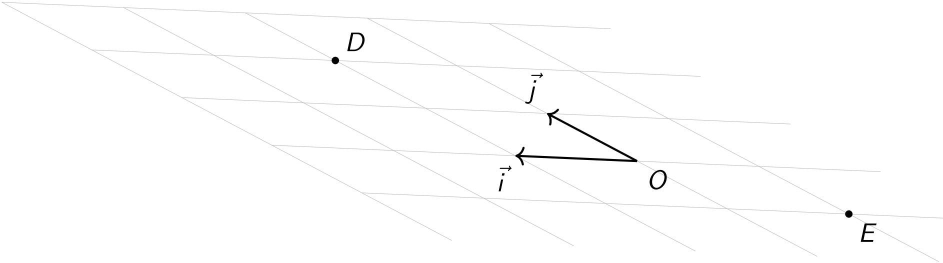
Lire les coordonnées de D et E dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$.



$D(1\,;\,2)$

Un peu plus difficile

Lire les coordonnées de D et E dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$.

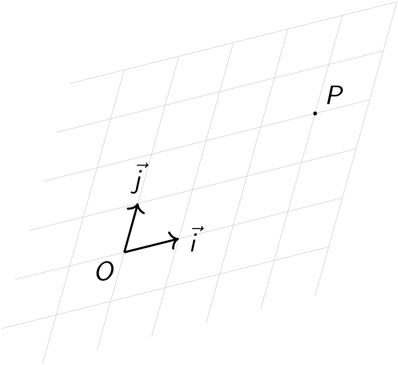


$D(1\,;\,2)$ $\quad E(-1\,;\,-1)$

Coordonnées d'un point : définition

Définition

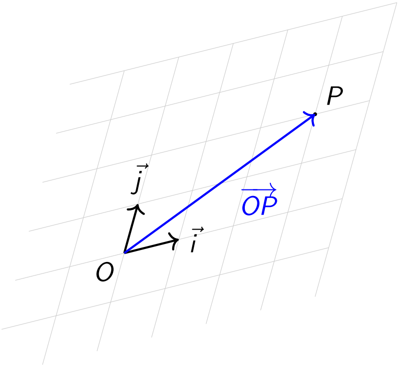
Dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$, les coordonnées du point P sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$.



Coordonnées d'un point : définition

Définition

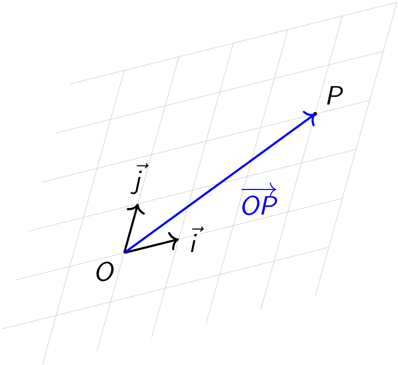
Dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$, les coordonnées du point P sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$.



Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour coordonnées

Définition

Dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$, les coordonnées du point P sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

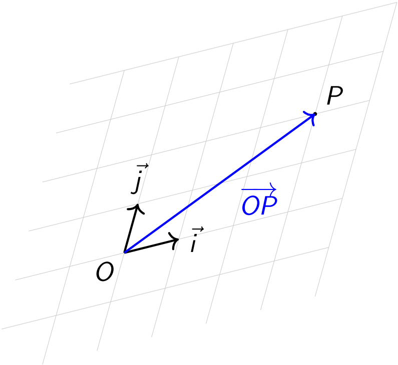


Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour coordonnées **(3,2)** dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$.

Coordonnées d'un point : définition

Définition

Dans un repère $(O,(\vec{i},\vec{j}))$, les coordonnées du point P sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$.



Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour coordonnées **(3,2)** dans le repère $(O,(\vec{i},\vec{j}))$.

Le point P a donc pour coordonnées **(3,2)** dans le repère $(O,(\vec{i},\vec{j}))$.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Situation

On travaille dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Situation

On travaille dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.
Soient deux points

$$A(x_A; y_A) \quad \text{et} \quad B(x_B; y_B).$$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Situation

On travaille dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.
Soient deux points

$$A(x_A; y_A) \quad \text{et} \quad B(x_B; y_B).$$

Proposition

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

dans le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: justification

On travaille toujours dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: justification

On travaille toujours dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.

Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: justification

On travaille toujours dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.

Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

En coordonnées, on a

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}.$$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: justification

On travaille toujours dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.

Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

En coordonnées, on a

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}.$$

L'égalité vectorielle s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_{AB} \\ y_A + y_{AB} \end{pmatrix}.$$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: justification

On travaille toujours dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.

Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

En coordonnées, on a

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}.$$

L'égalité vectorielle s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_{AB} \\ y_A + y_{AB} \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$x_{AB} = x_B - x_A \qquad \text{et} \qquad y_{AB} = y_B - y_A,$$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: justification

On travaille toujours dans un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan.

Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

En coordonnées, on a

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}.$$

L'égalité vectorielle s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_{AB} \\ y_A + y_{AB} \end{pmatrix}.$$

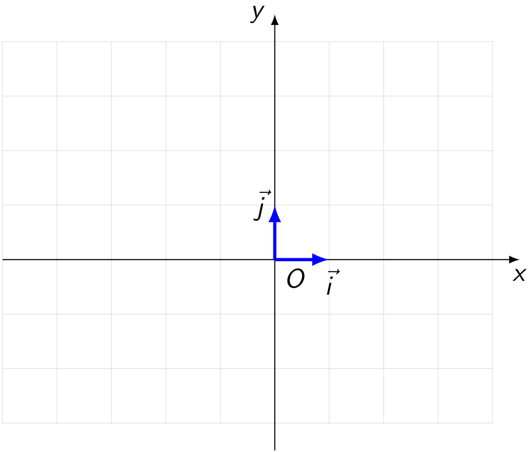
On en déduit

$$x_{AB} = x_B - x_A \qquad \text{et} \qquad y_{AB} = y_B - y_A,$$

c'est-à-dire

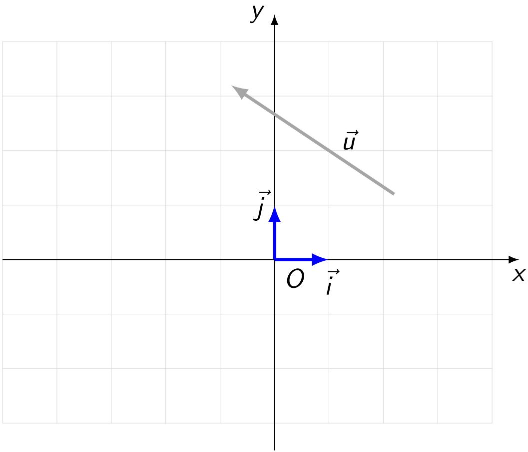
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Calcul de la norme d'un vecteur



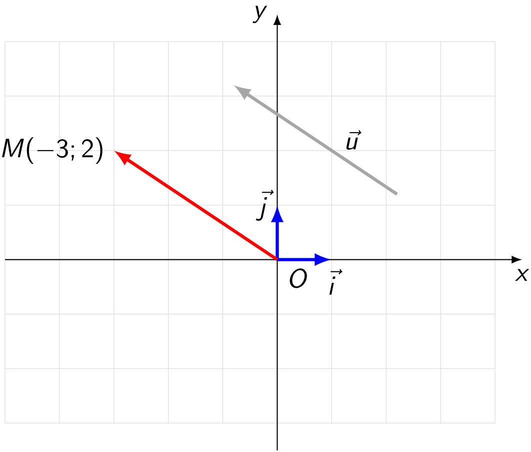
On considère un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$.

Calcul de la norme d'un vecteur



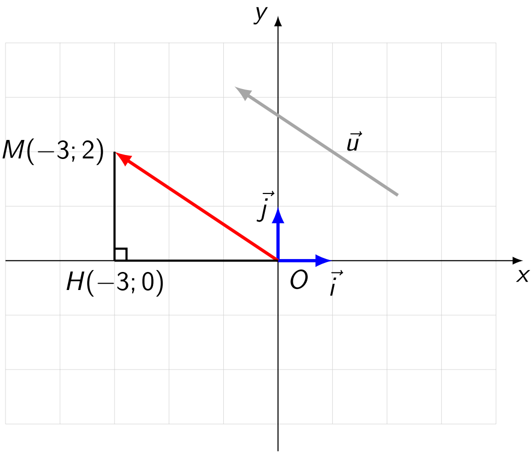
Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(3, 2)$.

Calcul de la norme d'un vecteur



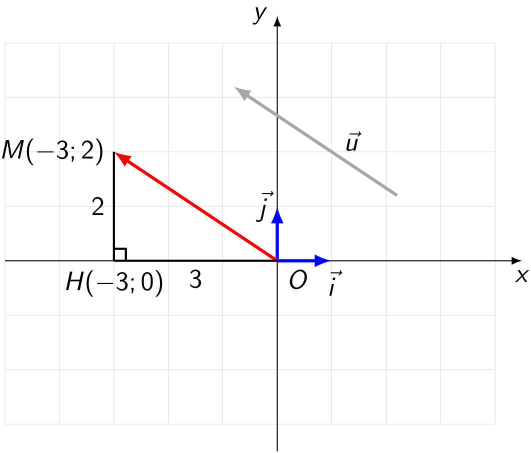
Le représentant de $\vec{u}$ d'origine O a pour extrémité le point M de coordonnées $(-3;2)$.

Calcul de la norme d'un vecteur



Soit $H(-3;0)$ le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H.

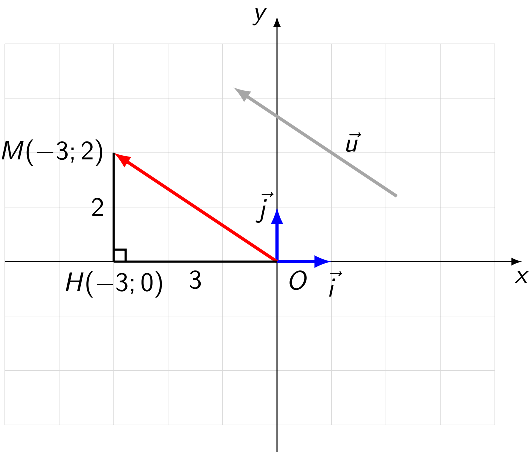
Calcul de la norme d'un vecteur



On a :

$$OH = 3 \qquad \text{et} \qquad HM = 2.$$

Calcul de la norme d'un vecteur



D'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

Donc

$$\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{13}.$$

Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété

Soit, dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété

Soit, dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété

Soit, dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété

Soit, dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est :

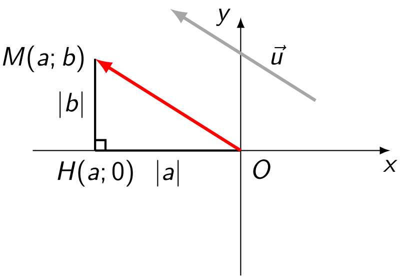
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}.$$

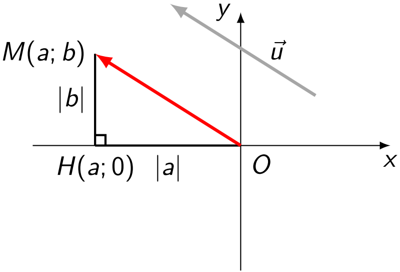
Démonstration



Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (a, b). Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
M a pour coordonnées $(a; b)$ et le projeté H de M sur l'axe des abscisses a pour coordonnées $(a, 0)$, le triangle OHM est rectangle en H et

$$OH = |a|, \quad HM = |b|, \quad OM = \|\vec{u}\|.$$

Démonstration



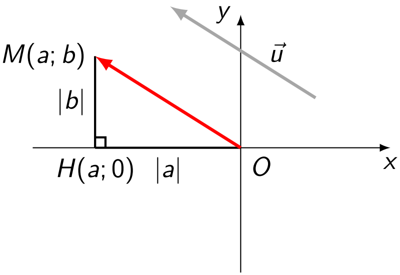
Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (a, b). Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
M a pour coordonnées $(a; b)$ et le projeté H de M sur l'axe des abscisses a pour coordonnées $(a, 0)$, le triangle OHM est rectangle en H et

$$OH = |a|, \quad HM = |b|, \quad OM = \|\vec{u}\|.$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{u}\|^2 = OH^2 + HM^2 = |a|^2 + |b|^2 = a^2 + b^2.$$

Démonstration



Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (a,b). Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
M a pour coordonnées $(a;b)$ et le projeté H de M sur l'axe des abscisses a pour coordonnées $(a,0)$, le triangle OHM est rectangle en H et

$$OH = |a|, \quad HM = |b|, \quad OM = \|\vec{u}\|.$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{u}\|^2 = OH^2 + HM^2 = |a|^2 + |b|^2 = a^2 + b^2.$$

Comme $\|\vec{u}\| \geq 0$, on obtient

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Distance entre deux points

Propriété

Soit, dans un repère orthonormé, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
La distance AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Distance entre deux points

Propriété

Soit, dans un repère orthonormé, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
La distance AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Démonstration

On sait que $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Or

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule de la norme d'un vecteur :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple

Soit $A(3;-1)$ et $B(2;3)$.

$$AB^2 = (2-3)^2 + (3-(-1))^2$$

$$AB^2 = (-1)^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17.$$

$$AB = \sqrt{17}.$$

Propriété

Soit, dans un repère *quelconque*, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soit, dans un repère *quelconque*, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soit, dans un repère *quelconque*, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Démonstration

Soit $I(x_I; y_I)$ le milieu de $[AB]$. Par définition du milieu :

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soit, dans un repère *quelconque*, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Démonstration

Soit $I(x_I; y_I)$ le milieu de $[AB]$. Par définition du milieu :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soit, dans un repère *quelconque*, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Démonstration

Soit $I(x_I; y_I)$ le milieu de $[AB]$. Par définition du milieu :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

Ces deux vecteurs ayant les mêmes coordonnées, on a

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soit, dans un repère *quelconque*, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Démonstration

Soit $I(x_I; y_I)$ le milieu de $[AB]$. Par définition du milieu :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

Ces deux vecteurs ayant les mêmes coordonnées, on a

$$x_I - x_A = x_B - x_I \qquad \text{et} \qquad y_I - y_A = y_B - y_I.$$

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soit, dans un repère *quelconque*, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Démonstration

Soit $I(x_I; y_I)$ le milieu de $[AB]$. Par définition du milieu :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

Ces deux vecteurs ayant les mêmes coordonnées, on a

$$x_I - x_A = x_B - x_I \qquad \text{et} \qquad y_I - y_A = y_B - y_I.$$

$$\text{Donc} \qquad 2x_I = x_A + x_B \qquad \text{et} \qquad 2y_I = y_A + y_B.$$

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Soit, dans un repère *quelconque*, les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Démonstration

Soit $I(x_I; y_I)$ le milieu de $[AB]$. Par définition du milieu :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

Ces deux vecteurs ayant les mêmes coordonnées, on a

$$x_I - x_A = x_B - x_I \qquad \text{et} \qquad y_I - y_A = y_B - y_I.$$

$$\text{Donc} \qquad 2x_I = x_A + x_B \qquad \text{et} \qquad 2y_I = y_A + y_B.$$

Ainsi

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Exemple

Soit $A(3;-1)$ et $B(2;3)$. Notons I le milieu de $[A,B]$.

Exemple

Soit $A(3;-1)$ et $B(2;3)$. Notons I le milieu de $[A,B]$.

$$I\left(\frac{3+2}{2}\,;\,\frac{-1+3}{2}\right)$$

Exemple

Soit $A(3;-1)$ et $B(2;3)$. Notons I le milieu de $[A,B]$.

$$I\left(\frac{3+2}{2}\,;\,\frac{-1+3}{2}\right) \qquad \text{donc} \qquad I\left(\frac{5}{2}\,;\,1\right).$$