Coordonnées de vecteurs

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires,

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires,
- $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires,
- $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Définition

Un repère du plan est un couple $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ où :

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires,
- $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Définition

Un repère du plan est un couple $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ où :

- O est un point du plan appelé

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires,
- $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Définition

Un repère du plan est un couple $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ où :

- O est un point du plan appelé **l'origine** ;

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires,
- $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Définition

Un repère du plan est un couple $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ où :

- O est un point du plan appelé **l'origine** ;
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires,
- $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Définition

Un repère du plan est un couple $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ où :

- O est un point du plan appelé **l'origine** ;
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.

Un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan est dit **orthonormée**

Définition : base du plan

Définition

Une **base** du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls, qui n'ont pas la même direction.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires,
- $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

Définition

Un repère du plan est un couple $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ où :

- O est un point du plan appelé **l'origine** ;
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.

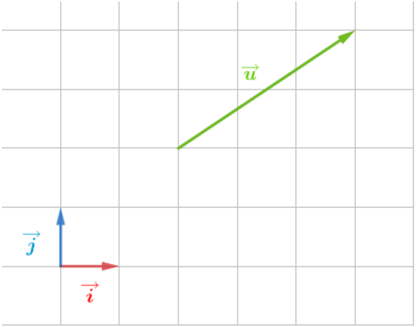
Un repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan est dit **orthonormée** si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

Coordonnées dans une base

Proposition et définition

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

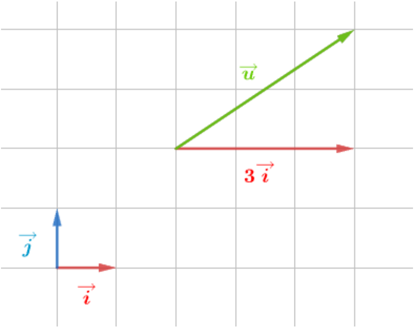


Coordonnées dans une base

Proposition et définition

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

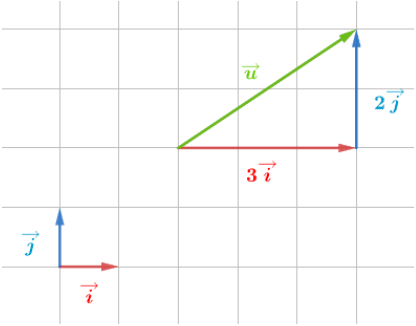


Coordonnées dans une base

Proposition et définition

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un unique couple de réels (x,y) tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

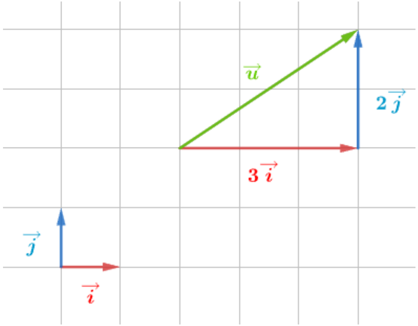


Coordonnées dans une base

Proposition et définition

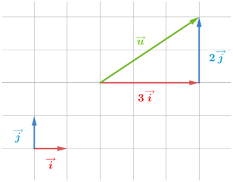
Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$



$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

Coordonnées dans une base

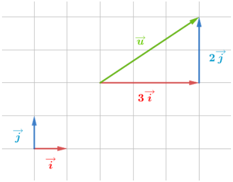


Vocabulaire

Les nombres x et y sont appelés les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemple : $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont

Coordonnées dans une base

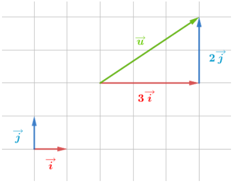


Vocabulaire

Les nombres x et y sont appelés les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemple : $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont 3 et 2.

Coordonnées dans une base



Vocabulaire

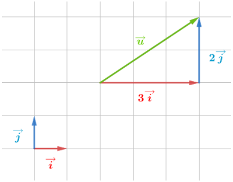
Les nombres x et y sont appelés les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemple : $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont 3 et 2.

Notation

On note :

$$\vec{u}(x; y) \qquad \text{ou} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Vocabulaire

Les nombres x et y sont appelés les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Exemple : $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont 3 et 2.

Notation

On note :

$$\vec{u}(x;y) \qquad \text{ou} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemple : on note

$$\vec{u}(3;2) \qquad \text{ou} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vecteur nul

Remarque

Dans n'importe quelle base, le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Égalité de deux vecteurs

Remarque

Dans n'importe quelle base, le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété

Des vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans une même base.

Opérations sur les vecteurs et coordonnées

Opérations sur les vecteurs et coordonnées

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan.

Opérations sur les vecteurs et coordonnées

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan.

Dans toute la suite, les coordonnées des vecteurs sont données dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Somme de deux vecteurs

Théorème

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs.

Somme de deux vecteurs

Théorème

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs. Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées

Somme de deux vecteurs

Théorème

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs. Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Somme de deux vecteurs

Théorème

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs. Alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Remarque

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour coordonnées

Somme de deux vecteurs

Théorème

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs. Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Remarque

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Multiplication par un réel

Théorème

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur, et soit λ un réel.

Multiplication par un réel

Théorème

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur, et soit λ un réel. Alors le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées

Multiplication par un réel

Théorème

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur, et soit λ un réel. Alors le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Colinéarité : définition

Définition

Deux vecteurs non nuls sont dits **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Colinéarité : caractérisation

Définition

Deux vecteurs non nuls sont dits **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Théorème

Des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel λ tel que

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

Corollaire

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs.

Colinéarité et coordonnées

Corollaire

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

Colinéarité et coordonnées

Corollaire

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$x' = \lambda x \qquad \text{et} \qquad y' = \lambda y;$$

Colinéarité et coordonnées

Corollaire

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$x' = \lambda x \qquad \text{et} \qquad y' = \lambda y;$$

on a alors

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

Exemple

Exemple

Les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

sont colinéaires car

Exemple

Les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

sont colinéaires car

$$6 = 3 \times 2 \qquad \text{et} \qquad 4 = 2 \times 2;$$

on a donc $\vec{v} = 2\vec{u}$.

Déterminant de deux vecteurs

Déterminant de deux vecteurs
Soit $\mathcal{B}$ une base du plan.

Déterminant de deux vecteurs

Soit $\mathcal{B}$ une base du plan.

Deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que

$$x = \lambda x' \quad \text{et} \quad y = \lambda y'.$$

Déterminant de deux vecteurs

Soit $\mathcal{B}$ une base du plan.

Deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que

$$x = \lambda x' \quad \text{et} \quad y = \lambda y'.$$

En divisant (en supposant provisoirement $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$), cette condition équivaut à

Déterminant de deux vecteurs

Soit $\mathcal{B}$ une base du plan.

Deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que

$$x = \lambda x' \quad \text{et} \quad y = \lambda y'.$$

En divisant (en supposant provisoirement $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$), cette condition équivaut à

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda,$$

Déterminant de deux vecteurs
Soit $\mathcal{B}$ une base du plan.
Deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que

$$x = \lambda x' \quad \text{et} \quad y = \lambda y'.$$

En divisant (en supposant provisoirement $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$), cette condition équivaut à

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda,$$

ce qui équivaut encore à

Déterminant de deux vecteurs

Soit $\mathcal{B}$ une base du plan.

Deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que

$$x = \lambda x' \quad \text{et} \quad y = \lambda y'.$$

En divisant (en supposant provisoirement $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$), cette condition équivaut à

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda,$$

ce qui équivaut encore à

$$xy' = x'y,$$

Déterminant de deux vecteurs

Soit $\mathcal{B}$ une base du plan.

Deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que

$$x = \lambda x' \quad \text{et} \quad y = \lambda y'.$$

En divisant (en supposant provisoirement $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$), cette condition équivaut à

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda,$$

ce qui équivaut encore à

$$xy' = x'y,$$

ce qui s'écrit encore

$$xy' - x'y = 0.$$

Déterminant de deux vecteurs

Soit $\mathcal{B}$ une base du plan.

Deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que

$$x = \lambda x' \quad \text{et} \quad y = \lambda y'.$$

En divisant (en supposant provisoirement $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$), cette condition équivaut à

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda,$$

ce qui équivaut encore à

$$xy' = x'y,$$

ce qui s'écrit encore

$$xy' - x'y = 0.$$

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0.$$

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0.$$

Définition. On appelle **déterminant de deux vecteurs**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ (ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$), le nombre réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0.$$

Définition. On appelle **déterminant de deux vecteurs**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ (ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$), le nombre réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

Exemple. Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) =$$

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0.$$

Définition. On appelle **déterminant de deux vecteurs**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ (ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$), le nombre réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

Exemple. Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 16 - 7 \times 5 \ =$$

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0.$$

Définition. On appelle **déterminant de deux vecteurs**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ (ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$), le nombre réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

Exemple. Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 16 - 7 \times 5 \;=\; -3.$$

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0.$$

Définition. On appelle **déterminant de deux vecteurs**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ (ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$), le nombre réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

Exemple. Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 16 - 7 \times 5 \ = \ -3.$$

Comme $-3 \neq 0$,

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0.$$

Définition. On appelle **déterminant de deux vecteurs**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ (ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$), le nombre réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

Exemple. Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 16 - 7 \times 5 \;=\; -3.$$

Comme $-3 \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.