Fonctions affines

1. Définition :

On appelle fonction affine une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b$$

pour tout réel x, où a et b sont des nombres réels.

1. Définition :
On appelle fonction affine une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b$$

pour tout réel x, où a et b sont des nombres réels.

2. Cas particuliers :
- Si $b = 0$, la fonction est dite linéaire.

1. Définition :

On appelle fonction affine une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b$$

pour tout réel x, où a et b sont des nombres réels.

2. Cas particuliers :

- Si $b = 0$, la fonction est dite linéaire.
- Si $a = 0$, la fonction est dite constante.

1. Définition :
On appelle fonction affine une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b$$

pour tout réel x, où a et b sont des nombres réels.

2. Cas particuliers :
- Si $b = 0$, la fonction est dite linéaire.
- Si $a = 0$, la fonction est dite constante.

3. Vocabulaire :
Dans l'écriture $f(x) = ax + b$, le réel a s'appelle le coefficient directeur de f et le réel b s'appelle l'ordonnée à l'origine de f.

4. Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

4. Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarques :

4. Propriété :
Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarques :
• Si la fonction est constante, cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.

4. Propriété :
Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarques :
• Si la fonction est constante, cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.
• Si la fonction est linéaire, cette droite passe par l'origine du repère.

Exercice 1

Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont affines. Pour celles qui sont affines, préciser, s'il y a lieu, si elles sont linéaires ou constantes, puis donner leur coefficient directeur et leur ordonnée à l'origine.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 2, \\ g(x) &= -5x, \\ h(x) &= 7, \\ k(x) &= (x+1)^2 - x^2, \\ m(x) &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Remarque : on ne se fie pas uniquement à l'apparence de l'expression ;

on peut commencer par développer ou réduire.

Exemple : une fonction affine déguisée

Considérons la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = (x+1)^2 - x^2.$$

Exemple : une fonction affine déguisée

Considérons la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = (x+1)^2 - x^2.$$

En développant, on obtient

$$k(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$$

Exemple : une fonction affine déguisée

Considérons la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = (x+1)^2 - x^2.$$

En développant, on obtient

$$k(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$$

Ainsi, k est une fonction affine.

Exemple : une fonction affine déguisée

Considérons la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = (x+1)^2 - x^2.$$

En développant, on obtient

$$k(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1.$$

Ainsi, k est une fonction affine.
Son coefficient directeur vaut 2 et son ordonnée à l'origine vaut 1.

Principe d'une démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une propriété est fausse, on peut supposer qu'elle est vraie et montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Principe d'une démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une propriété est fausse, on peut supposer qu'elle est vraie et montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Schéma général :
On suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer.

Principe d'une démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une propriété est fausse, on peut supposer qu'elle est vraie et montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Schéma général :
On suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer.
On en déduit plusieurs égalités ou plusieurs conséquences logiques.

Principe d'une démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une propriété est fausse, on peut supposer qu'elle est vraie et montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Schéma général :
On suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer.
On en déduit plusieurs égalités ou plusieurs conséquences logiques.
Si l'on aboutit à une impossibilité, alors l'hypothèse de départ est fausse.

Exemple : montrer que $x^2 + 1$ n'est pas affine

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$m(x) = x^2 + 1.$$

Exemple : montrer que x^2+1 n'est pas affine

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$m(x) = x^2 + 1.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que m soit affine.

Exemple : montrer que x^2+1 n'est pas affine

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$m(x) = x^2 + 1.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que m soit affine.
Il existerait alors deux réels a et b tels que, pour tout réel x,

$$x^2 + 1 = ax + b.$$

Exemple : montrer que x^2+1 n'est pas affine

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$m(x) = x^2 + 1.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que m soit affine.
Il existerait alors deux réels a et b tels que, pour tout réel x,

$$x^2 + 1 = ax + b.$$

En prenant $x = 0$, on obtiendrait $1 = b$.

Exemple : montrer que $x^2 + 1$ n'est pas affine

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$m(x) = x^2 + 1.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que m soit affine.
Il existerait alors deux réels a et b tels que, pour tout réel x,

$$x^2 + 1 = ax + b.$$

En prenant $x = 0$, on obtiendrait $1 = b$.
En prenant $x = 1$, on obtiendrait $2 = a + b$, donc $a = 1$.

Exemple : montrer que x^2+1 n'est pas affine

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$m(x) = x^2 + 1.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que m soit affine.
Il existerait alors deux réels a et b tels que, pour tout réel x,

$$x^2 + 1 = ax + b.$$

En prenant $x = 0$, on obtiendrait $1 = b$.
En prenant $x = 1$, on obtiendrait $2 = a + b$, donc $a = 1$.
En prenant $x = 2$, on obtiendrait $5 = 2a + b = 2 \times 1 + 1 = 3$, ce qui est impossible.

Exemple : montrer que $x^2 + 1$ n'est pas affine

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$m(x) = x^2 + 1.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que m soit affine.
Il existerait alors deux réels a et b tels que, pour tout réel x,

$$x^2 + 1 = ax + b.$$

En prenant $x = 0$, on obtiendrait $1 = b$.
En prenant $x = 1$, on obtiendrait $2 = a + b$, donc $a = 1$.
En prenant $x = 2$, on obtiendrait $5 = 2a + b = 2 \times 1 + 1 = 3$, ce qui est impossible.
On a obtenu une contradiction. Ainsi, la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ n'est pas affine.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2.$$

1. Calculer l'image de 0 par f.
2. Calculer l'image de 2 par f.
3. En déduire deux points appartenant à la courbe représentative de f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Correction de l'exercice 2

On a
$$f(0) = 0 + 2 = 2.$$
Le point $(0, 2)$ appartient donc à la courbe représentative de f.

Correction de l'exercice 2

On a

$$f(0) = 0 + 2 = 2.$$

Le point $(0, 2)$ appartient donc à la courbe représentative de f.

On a aussi

$$f(2) = 2 + 2 = 4.$$

Le point $(2, 4)$ appartient donc à la courbe représentative de f.

Correction de l'exercice 2

On a
$$f(0) = 0 + 2 = 2.$$

Le point $(0, 2)$ appartient donc à la courbe représentative de f.

On a aussi
$$f(2) = 2 + 2 = 4.$$

Le point $(2, 4)$ appartient donc à la courbe représentative de f.

On a ainsi obtenu deux points de la courbe représentative de f : $(0, 2)$ et $(2, 4)$.

Correction de l'exercice 2

On a
$$f(0) = 0 + 2 = 2.$$
Le point $(0, 2)$ appartient donc à la courbe représentative de f.

On a aussi
$$f(2) = 2 + 2 = 4.$$
Le point $(2, 4)$ appartient donc à la courbe représentative de f.

On a ainsi obtenu deux points de la courbe représentative de f : $(0, 2)$ et $(2, 4)$.
La courbe représentative d'une fonction affine étant une droite, il suffit de tracer la droite passant par le points de coordonnées $(0, 2)$ et le point de coordonnées $(2, 4)$.

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b.$$

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b.$$

5. <u>Théorème</u> :
Pour tous nombres réels u et v distincts,

$$a = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b.$$

5. Théorème :
Pour tous nombres réels u et v distincts,

$$a = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

Démonstration : Soient u et v des nombres réels distincts.

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b.$$

5. Théorème :
Pour tous nombres réels u et v distincts,

$$a = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

Démonstration : Soient u et v des nombres réels distincts.
On a

$$f(u) - f(v) = (au + b) - (av + b) = au - av = a(u - v).$$

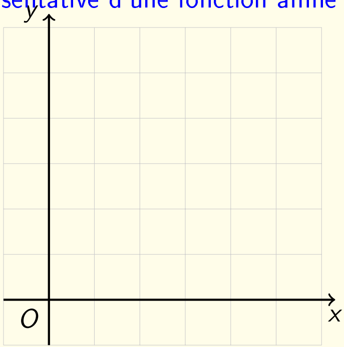
Comme $u - v \neq 0$, on peut diviser par $u - v$ et l'on obtient la formule annoncée.

6. Conséquence :
Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points distincts appartenant à la courbe représentative de f, alors comme $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$, on a

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

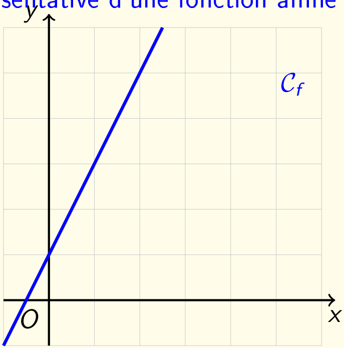
Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



Coefficient directeur par lecture graphique

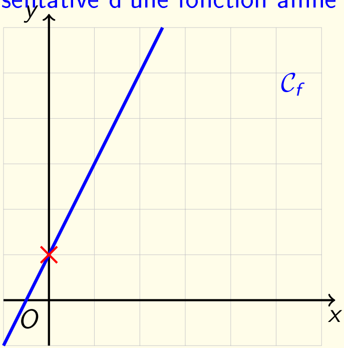
Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

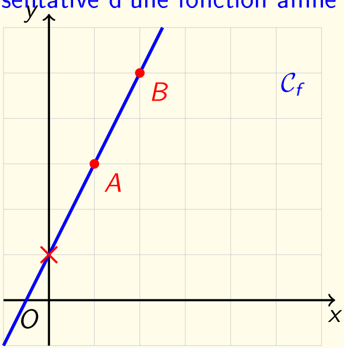
Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



Coefficient directeur par lecture graphique

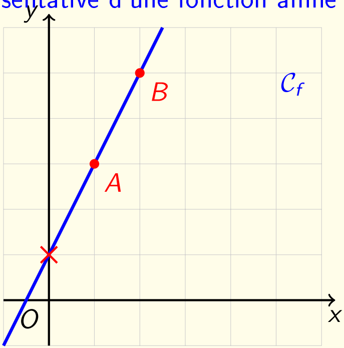
Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

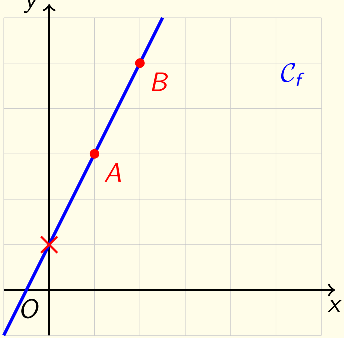


Coordonnées : $A(1, 3)$ $B(2, 5)$

Coefficient directeur par lecture graphique

Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

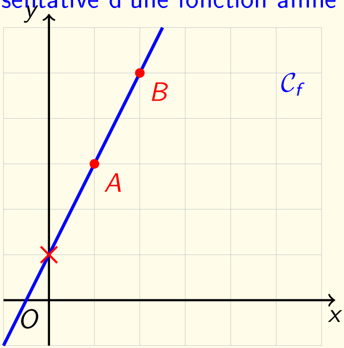


Coordonnées : $A(1, 3)$ $B(2, 5)$

Coefficient directeur : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-3}{2-1} = 2.$

Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



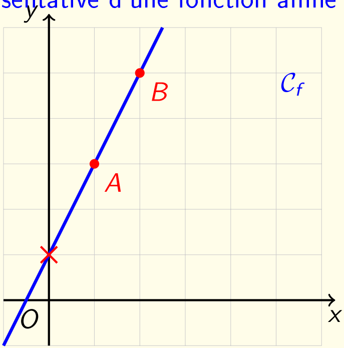
Coordonnées : $A(1, 3)$ $\quad$ $B(2, 5)$

Coefficient directeur : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5 - 3}{2 - 1} = 2.$

Ordonnée à l'origine : $b = f(0) = 1.$

Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



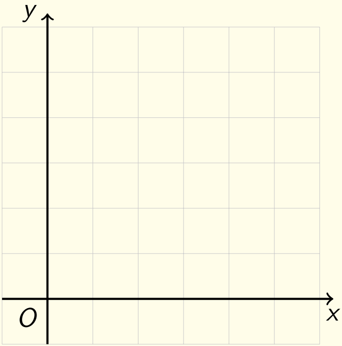
Coordonnées : $A(1, 3)$ $B(2, 5)$

Coefficient directeur : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-3}{2-1} = 2.$

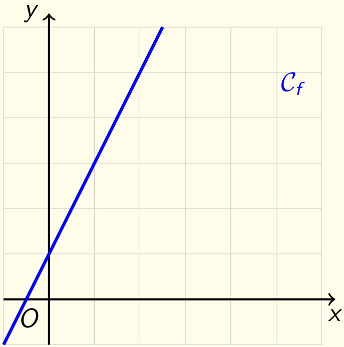
Ordonnée à l'origine : $b = f(0) = 1.$

Conclusion : $f : x \mapsto 2x + 1.$

Méthode : "compter les carreaux"

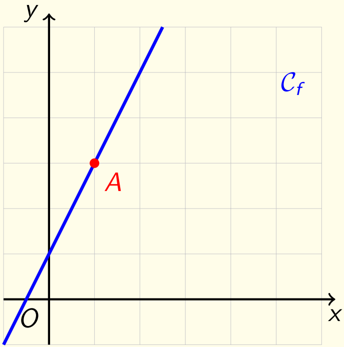


Méthode : "compter les carreaux"



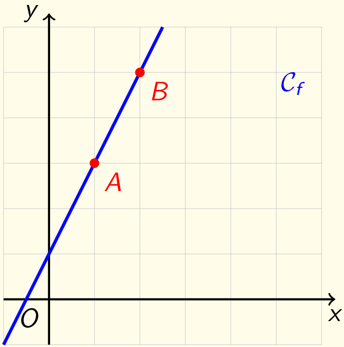
Coefficient directeur par lecture graphique

Méthode : "compter les carreaux"



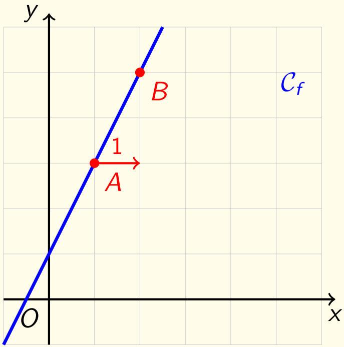
Coefficient directeur par lecture graphique

Méthode : "compter les carreaux"



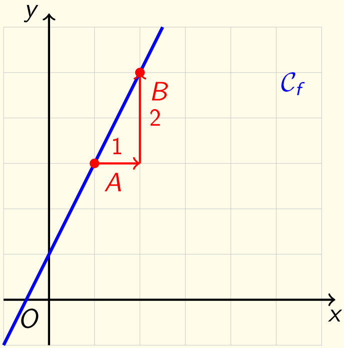
Coefficient directeur par lecture graphique

Méthode : "compter les carreaux"

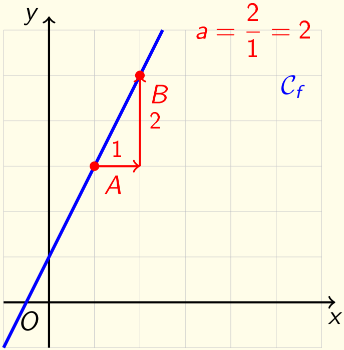


Coefficient directeur par lecture graphique

Méthode : "compter les carreaux"

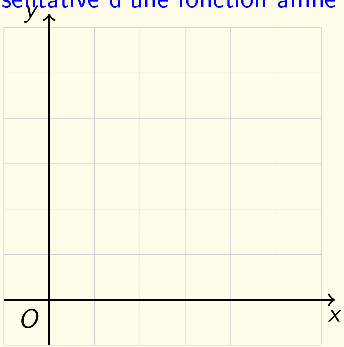


Méthode : "compter les carreaux"



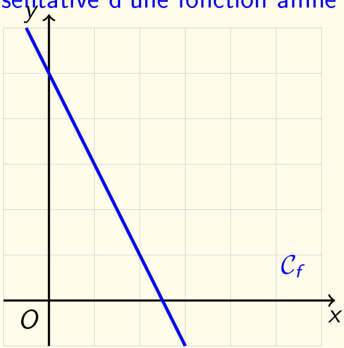
Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



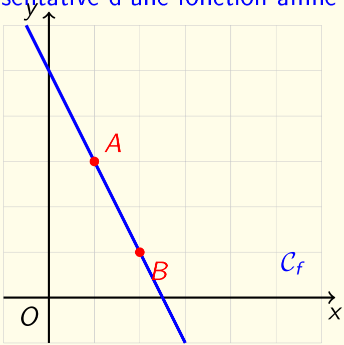
Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

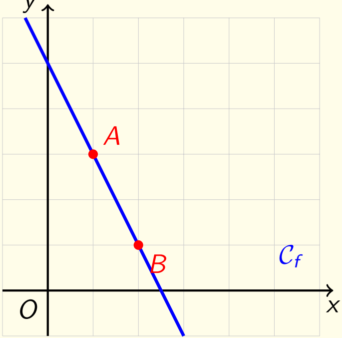
Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



Coefficient directeur par lecture graphique

Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

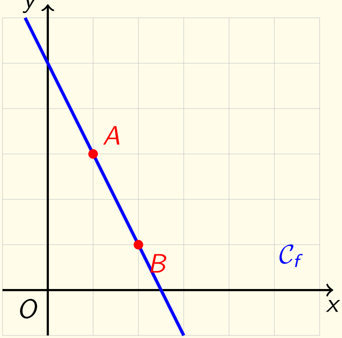


Coordonnées : $A(1,3)$ $B(2,1)$

Coefficient directeur par lecture graphique

Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

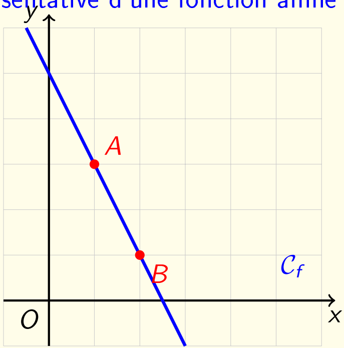


Coordonnées : $A(1, 3)$ $\quad B(2, 1)$

Coefficient directeur : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{2-1} = -2.$

Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



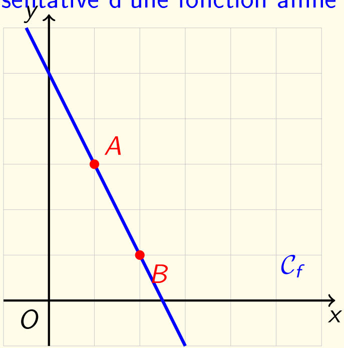
Coordonnées : $A(1, 3)$ $B(2, 1)$

Coefficient directeur : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{2-1} = -2.$

Ordonnée à l'origine : $b = 5.$

Lecture graphique : coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



Coordonnées : $A(1, 3)$ $B(2, 1)$

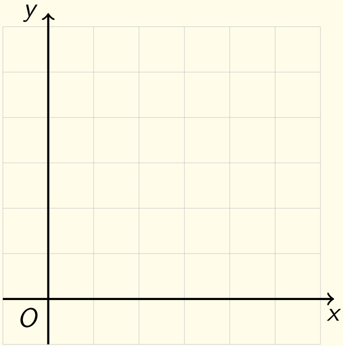
Coefficient directeur : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{2-1} = -2.$

Ordonnée à l'origine : $b = 5.$

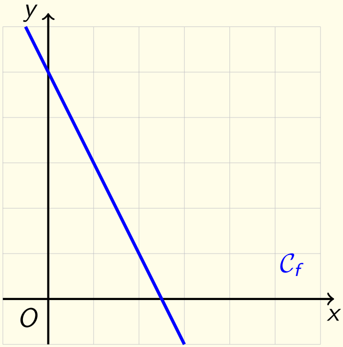
Conclusion : $f : x \mapsto -2x + 5.$

Coefficient directeur : astuce graphique

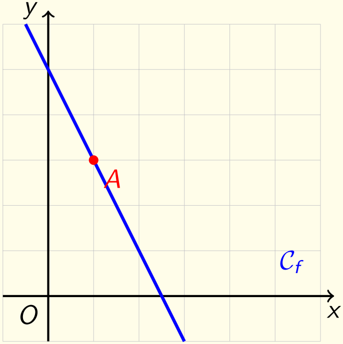
Astuce : compter les carreaux



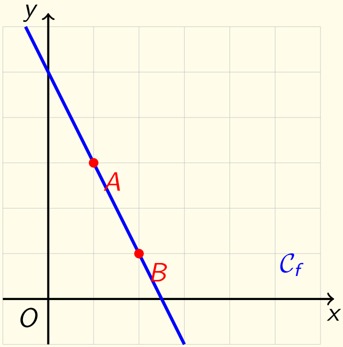
Astuce : compter les carreaux



Astuce : compter les carreaux

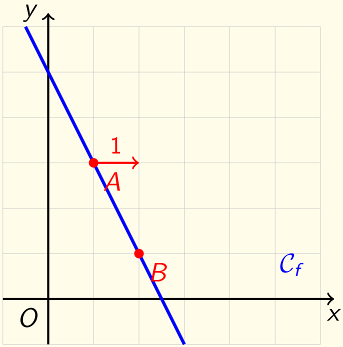


Astuce : compter les carreaux



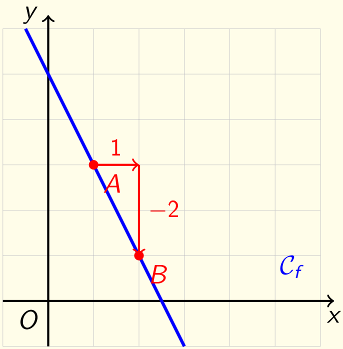
Coefficient directeur : astuce graphique

Astuce : compter les carreaux



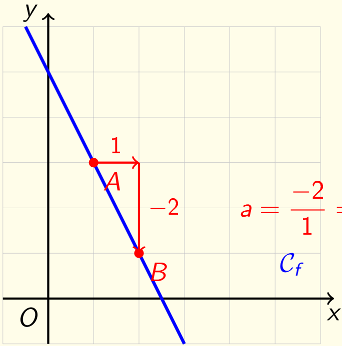
Coefficient directeur : astuce graphique

Astuce : compter les carreaux



Coefficient directeur : astuce graphique

Astuce : compter les carreaux



$$a = \frac{-2}{1} = -2$$

Exercice 3

On considère les points $A(1,2)$ et $B(4,8)$, appartenant à la courbe représentative d'une fonction affine f.

1. Calculer le coefficient directeur de f.
2. Représenter dans un repère la droite passant par A et B.
3. Retrouver le coefficient directeur par lecture graphique, en comptant les carreaux.
4. Sachant que $f(1) = 2$, déterminer l'expression de f.

Correction de l'exercice 3

On a

$$a = \frac{8-2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Correction de l'exercice 3

On a
$$a = \frac{8-2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2.$$

La droite passant par $A(1,2)$ et $B(4,8)$ est donc la courbe représentative cherchée.

Correction de l'exercice 3

On a

$$a = \frac{8-2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2.$$

La droite passant par $A(1,2)$ et $B(4,8)$ est donc la courbe représentative cherchée.

Par lecture graphique, quand on avance de 3 carreaux vers la droite, on monte de 6 carreaux. On retrouve donc

$$a = \frac{6}{3} = 2.$$

Correction de l'exercice 3

On a

$$a = \frac{8-2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2.$$

La droite passant par $A(1,2)$ et $B(4,8)$ est donc la courbe représentative cherchée.

Par lecture graphique, quand on avance de 3 carreaux vers la droite, on monte de 6 carreaux. On retrouve donc

$$a = \frac{6}{3} = 2.$$

Comme $f(1) = 2$, on a

$$2 = 2 \times 1 + b,$$

d'où $b = 0$. Ainsi,

$$f(x) = 2x.$$

Exercice 4

On donne une droite passant par les points $A(0, -2)$ et $B(3, 4)$.

1. Déterminer son coefficient directeur.
2. Représenter cette droite dans un repère.
3. Retrouver le coefficient directeur par lecture graphique, en comptant les carreaux.
4. Déterminer son ordonnée à l'origine.
5. En déduire l'expression de la fonction affine représentée.

Correction de l'exercice 4

On a

$$a = \frac{4 - (-2)}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2.$$

Correction de l'exercice 4

On a

$$a = \frac{4-(-2)}{3-0} = \frac{6}{3} = 2.$$

La droite représentée passe donc par $A(0,-2)$ et par $B(3,4)$.

Correction de l'exercice 4

On a

$$a = \frac{4-(-2)}{3-0} = \frac{6}{3} = 2.$$

La droite représentée passe donc par $A(0,-2)$ et par $B(3,4)$.

Par lecture graphique, lorsqu'on avance de 3 carreaux vers la droite, on monte de 6 carreaux. On retrouve donc

$$a = \frac{6}{3} = 2.$$

Correction de l'exercice 4

On a

$$a = \frac{4-(-2)}{3-0} = \frac{6}{3} = 2.$$

La droite représentée passe donc par $A(0,-2)$ et par $B(3,4)$.

Par lecture graphique, lorsqu'on avance de 3 carreaux vers la droite, on monte de 6 carreaux. On retrouve donc

$$a = \frac{6}{3} = 2.$$

Comme la droite passe par le point $(0,-2)$, son ordonnée à l'origine vaut -2. Ainsi, la fonction affine représentée est

$$f(x) = 2x - 2.$$

Sens de variation

7. Théorème :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b.$$

Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation

7. <u>Théorème</u> :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b.$$

Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation

7. Théorème :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b.$$

Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

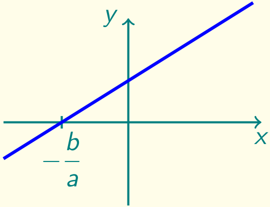
Fonctions affines

Tableaux de signes de $f(x) = ax + b$

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Fonction croissante



Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Fonction décroissante